# Macht es der Computer möglich? —
# Ein Beweis der Keplerschen Vermutung


**Zusammenfassung**

*„Of all the problems likely to replace Fermat's Last Theorem as the greatest unsolved problem in mathematics the best candidate is Kepler's sphere packing problem.“*[1] — Anfang August 1998 kündigte Thomas C. Hales von der University of Michigan an, daß seine mehr als fünf Jahre andauernden Untersuchungen zur Keplerschen Vermutung erfolgreich zum Abschluß gekommen sind.


### *Ein Neujahrsgeschenk vor fast 400 Jahren*

Im Jahre 1611 veröffentlichte Johannes Kepler [7] ein Büchlein mit dem interessanten Titel „Vom Sechseckigen Schnee“, das er seinem Freund und Gönner, dem Prager Hofrat Wackher von Wackenfels, als Neujahrsgabe widmete. Er studierte darin unter anderem verschiedene Anordnungen (*Packungen*) sich nicht überlappender, kongruenter Kugeln im 3-dimensionalen Euklidischen Raum und verglich den Anteil des von den Kugeln jeweils überdeckten Raumes am Gesamtraum (die *Dichten* der Packungen).

Eine dieser Packungen ist heute als die flächenzentrierte, kubische Gitterpackung, die *fcc-Packung*, bekannt. Sie läßt sich wie folgt realisieren: Zunächst wird eine Grundschicht von Kugeln konstruiert, in der jede Kugel von 6 anderen Kugeln berührt wird – die *hexagonale Packung* in der Ebene. Eine Kopie dieser Schicht wird nun so auf die Grundschicht gelegt, daß die Kugeln in die „Lücken“ der ersten Schicht fallen (Abbildung 1): die zweite Schicht entsteht also aus der Grundschicht durch Translation um einen gewissen Vektor $v$. Im weiteren werden nun Kopien der Grundschicht so gestapelt, daß man die $k$-te Schicht aus der Grundschicht durch Translation um den Vektor $(k-1)\cdot v$ erhält.

Betrachtet man einen pyramidenförmigen Ausschnitt dieser Packung (Abbildung 2), so erinnert die Anordnung an einen Haufen Kanonenkugeln oder an zum Verkauf aufgeschichtete Orangen.

Die Dichte der fcc-Packung beträgt $\pi/\sqrt{18} \approx 0,74048\ldots$, und sie ist nur eine unter unendlich vielen verschiedenen Packungen dieser Dichte. Kepler war jedoch davon überzeugt, daß es keine Packung mit einer größeren Dichte geben kann: die Keplersche Vermutung war geboren!

### *Eine skandalöse Situation*

Seitdem hat die Frage nach einer dichtesten Kugelpackung im 3-dimensionalen Euklidischen Raum viele Mathematiker in ihren Bann gezogen. Nicht

[1] Simon Singh, „Fermat's Last Theorem“, Fourth estate, London, 1997.

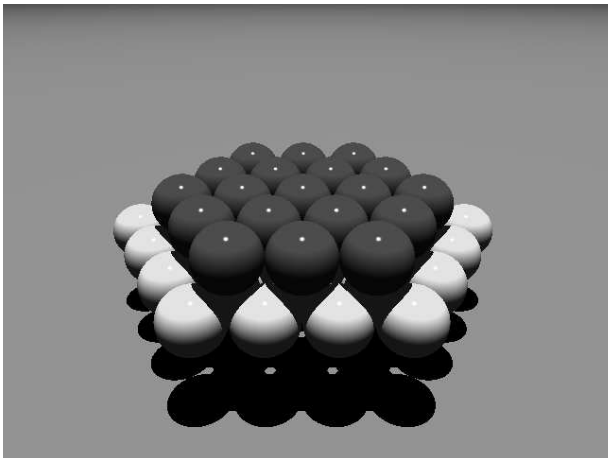

Abbildung 1: Stapeln von Schichten

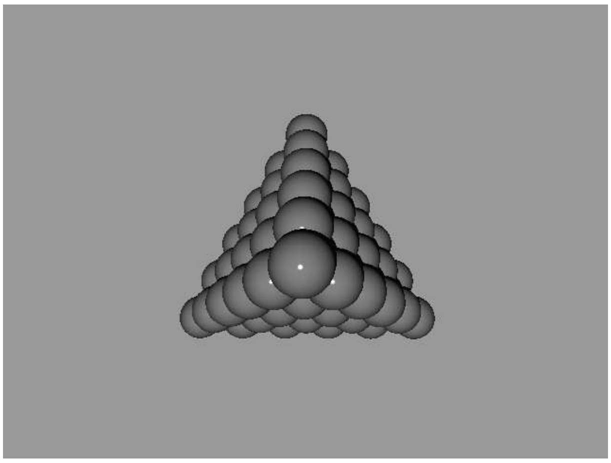

Abbildung 2: Pyramidenförmiger Ausschnitt der fcc-Packung

zuletzt fand sie als ein Teil des 18. Problems auch Eingang in die Liste der Hilbertschen Probleme. Obwohl, wie C.A. Rogers [9] schreibt, „[...] many mathematicians believe, and all physicists know", daß die Vermutung richtig ist, hielt sie bisher allen Beweisbemühungen Stand. John Milnor [8] kommentierte die Keplersche Vermutung 1967 mit den Worten: „[...] the corresponding problem in 3 dimensions remains unsolved. This is a scandalous situation [...]. All that is missing is a proof."

Auch wenn bislang kein Beweis vorlag, so hat es doch im Laufe der letzten vier Jahrhunderte zahlreiche wichtige Beiträge zum Kugelpackungsproblem gegeben. Gauss bewies 1831 die Optimalität der fcc-Packung innerhalb der Familie der *Gitterpackungen*, d.h. solcher Packungen, deren Kugelmittelpunkte ein Gitter bilden. Gitterpackungen sind einfacher zu analysieren als beliebige Packungen, und die dichtesten Gitterpackungen sind bis Dimension 8 bekannt. Bereits 1773 hatte J.L. Lagrange gezeigt, daß die oben beschriebene 2-dimensionale hexagonale Packung eine optimale Gitterpackung des Kreises darstellt. Daß diese Packung auch im allgemeinen bestmöglich ist, hat im Jahre 1892 der norwegische Mathematiker A. Thue bewiesen. Eine erste obere Schranke $(0,884\ldots)$ für die Dichte einer optimalen 3-dimensionalen Kugelpackung findet sich bei H.F. Blichfeldt im Jahre 1919. In den vergangenen 80 Jahren ist diese Schranke mehrfach verbessert worden; es seien hier nur die Schranken von C.A. Rogers $(0,7797\ldots)$, 1958, und D.J. Muder $(0,7731\ldots)$, 1993, genannt. Ein weiterer Meilenstein in der Geschichte der Keplerschen Vermutung ist László Fejes Tóths Zugang zum Kugelpackungsproblem, der die weiteren Bemühungen nachhaltig beeinflußt hat und von dem gleich noch die Rede sein wird.

Zu erwähnen bleibt leider auch noch ein gescheiterter Beweis der Keplerschen Vermutung. W.-Y. Hsiang [6] veröffentlichte 1993 eine Arbeit mit dem Titel „On the sphere packing problem and the proof of Kepler's conjecture". Es entbrach eine zum Teil hitzig geführte Diskussion um die Korrektheit des Beweises, die Gabor Fejes Tóth 1996 mit den Worten resümierte: „This cannot be considered as a proof. The problem is still open." Für weitere Einzelheiten zur „Geschichte der Keplerschen Vermutung" sei auf den Artikel von Károly Bezdek in den DMV-Mitteilungen 4/1996 [2] verwiesen.

*Computer versus Kepler*

Der nun von Thomas C. Hales vorgelegte, fast 250 Seiten umfassende Beweis ist in fünf Abschnitte untergliedert, wobei der fünfte Abschnitt die Doktorarbeit seines Doktoranden Samuel Ferguson enthält. Die ersten beiden Teile sind bereits 1997 publiziert worden [4]; die verbleibenden Teile sind über Internet frei zugänglich (`http://www.math.lsa.umich.edu/~hales/countdown`). Der grundlegende Ansatz Hales' beruht auf einem Programm zur Lösung der Keplerschen Vermutung, welches L. Fejes Tóth [3] schon in den fünfziger Jahren vorgestellt hat. Es läßt sich grob wie folgt beschreiben:

Zu jedem Kugelmittelpunkt $x$ einer Packung wird die zugehörige *Dirichlet-Voronoï* Zelle (DV-Zelle) betrachtet. Sie besteht aus allen Punkten des Raumes, deren Abstand zu $x$ nicht größer ist als zu irgendeinem anderen Kugelmittelpunkt der Packung. Jede DV-Zelle ist ein konvexes Polyeder, und die Vereinigung dieser Zellen bildet eine Pflasterung des Raumes. Im Falle einer Gitterpackung sind alle DV-Zellen identisch; die Dichte einer Gitterpackung ist somit gleich dem Verhältnis des Volumens einer Kugel zu dem Volumen einer DV-Zelle. Die DV-Zellen der fcc-Packung sind Rhombendodekaeder (Abbildung 3) und für eine Packung von Kugeln mit Radius 1 beträgt ihr Volumen $5,656\ldots$.

Dies ist jedoch nicht das kleinste Volumen, welches eine DV-Zelle einer Packung haben kann. Das in Abbildung 4 dargestellte Dodekaeder etwa hat ein Volumen von $5,550\ldots$, und L. Fejes Tóth vermutete, daß dies auch das minimale Volumen einer DV-Zelle einer Packung ist. Diese sogenannte dodekaedrische Vermutung ist eng verbunden mit dem Kugelpackungsproblem (s. [2]), und einen Beweis dieser Vermutung haben kürzlich Thomas C. Hales und Sean McLaughlin angekündigt [5].

Nun kann der Raum nicht lückenlos mit Dodekaedern ausgefüllt werden, und so muß, sollte sich die Keplersche Vermutung als richtig erweisen, jede Packung, in der dodekaedrische DV-Zellen auftreten, auch DV-Zellen mit größerem Volumen besitzen. Zum Beweis der Keplerschen Vermutung ist es daher notwendig,

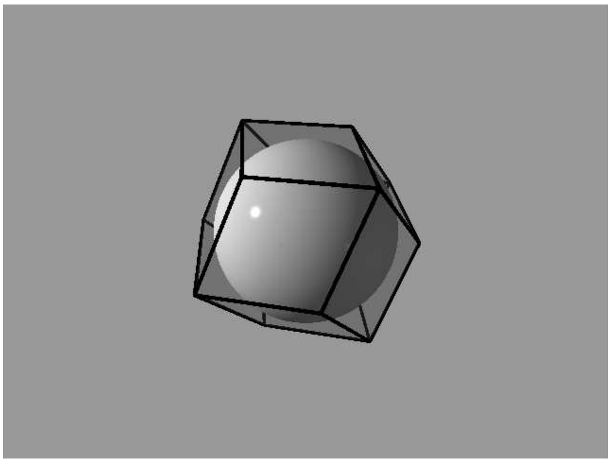

Abbildung 3: Rhombendodekaeder

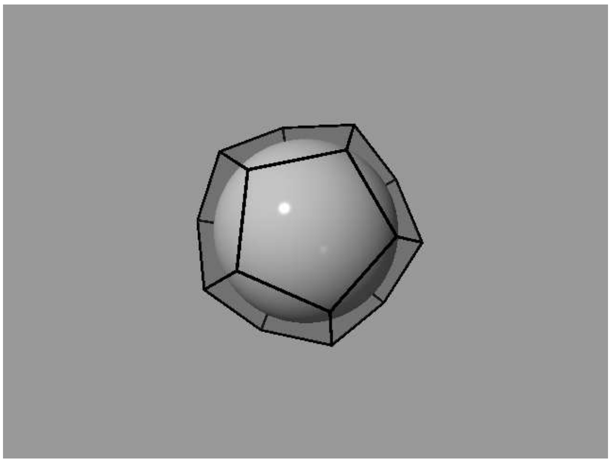

Abbildung 4: Dodekaeder

mehrere DV-Zellen zu betrachten und eine geeignete *lokale Dichte* auf diesen Zellen zu definieren. L. Fejes Tóth schlug vor, bis zu 13 DV-Zellen auszuwählen und ihre lokale Dichte durch ein gewichtetes, durchschnittliches Volumen zu messen. Damit reduzierte er das Problem auf ein Optimierungsproblem in endlich vielen Variablen, und Fejes Tóth äußerte die Hoffnung, daß dieses aufgrund der rasanten Entwicklung der Computertechnologie in naher Zukunft gelöst werden könne.

In gewisser Hinsicht hat Thomas C. Hales diese Hoffnung erfüllt, denn wie er selber schreibt: „[...] nearly every aspect of the proof relies on computer verifications." Der von ihm verwendete Zugang geht jedoch weit über das von L. Fejes Tóth aufgestellte Programm hinaus. Er benutzt nicht nur die Zerlegung des Raumes in DV-Zellen, sondern mischt diese Zerlegung mit ihrer dualen Zerlegung, der sogenannten *Delaunay Triangulierung*. Die von Hales betrachteten lokalen Dichten involvieren neben den Volumina der DV-Zellen unter anderem auch sphärische Volumina. Das daraus resultierende Optimierungsproblem (in ca. 150 Variablen) ist extrem komplex und mit heutigen Standardmethoden der nichtlinearen Optimierung nicht lösbar. Die Beweisstrategie von Hales genauer zu beschreiben, würde sicherlich an dieser Stelle zu weit führen. Um jedoch zu demonstrieren, wie komplex dieser Beweis ist und wie sehr er sich auf Computerberechnungen stützt, sei folgendes erwähnt: Mit Hilfe des Computers werden unter Verwendung von Intervall-Arithmetik ca. 5000 ebene Graphen klassifiziert, die zu den „relevanten Kugelpackungen“ korrespondieren. Jeder dieser Graphen führt zu einem nichtlinearen Optimierungsproblem, von denen die meisten mit Hilfe von linearen Relaxationen gelöst werden können. Insgesamt werden ungefähr 100000 lineare Optimierungsprobleme betrachtet, jedes ist in etwa 100 bis 200 Variablen formuliert und besitzt 1000 bis 2000 Restriktionen. Die verbleibenden nichtlinearen Optimierungsprobleme werden mit *Branch and Bound*-Methoden aus der globalen Optimierung behandelt. Die Inputdaten all dieser Optimierungsprobleme sowie zahlreiche weitere „Quellenfiles“ sind ebenfalls unter `http://www.math.lsa.umich.edu/~hales/countdown` einzusehen.

Es sei hier festgehalten, daß die mehr als 5 Jahre dauernden Untersuchungen von Thomas C. Hales durch eine große Transparenz gekennzeichnet waren. Hales berichtete auf Konferenzen stets freizügig über den aktuellen Stand seiner Forschung und dokumentierte zudem die wesentlichen Fortschritte auf seiner Homepage. Über die Korrektheit seines Beweises ist damit natürlich nichts gesagt, und es wird noch einige Zeit vergehen, bevor die Arbeit von Hales abschließend beurteilt werden kann. Aber es besteht wieder Hoffnung, daß zukünftig, neben dem Beweis des Fermatschen Satzes, auch die Lösung der Keplerschen Vermutung im mathematischen Rückblick auf dieses ausklingende Jahrhundert zu nennen sein wird.

**NB:** In populärwissenschaftlichen Arbeiten zur Keplerschen Vermutung wird gerne darauf verwiesen, daß ein Beweis der Keplerschen Vermutung impliziert, daß die pyramidenförmige Anordnung von Orangen, wie etwa in Abbildung 2 dargestellt, am „platzsparendsten“ ist. Jeder Obsthändler weiß, und die meisten Mathematiker glauben, daß dies richtig ist; bisher gibt es aber keinen Beweis dafür. Es handelt sich nun hierbei um ein endliches Packungsproblem (siehe zum Beispiel [1], [10]), und dies ist eine (fast) ganz andere Geschichte ...

# Literatur


[1] U. Betke, M. Henk and J.M. Wills, *Finite and infinite packings*, J. Reine Angew. Math. **?** (1994), ?? – ??.

[2] K. Bezdek, *Kepler's conjecture and the dodecahedral conjecture*, DMV-Mitteilungen **4** (1996), 52 – 54.

[3] L. Fejes Tóth, *Lagerungen in der Ebene, auf der Kugel und im Raum*, Springer, Berlin, first edition, 1953.

[4] T.C. Hales, *Sphere Packings I*, Discrete Comput. Geom. **17** (1997), 1 – 51, *Sphere Packings II*, Discrete Comput. Geom. **18** (1997), 135 – 149.

[5] T.C. Hales and S. McLaughlin, *A proof of the dodecahedral conjecture*, 1998, preprint.

[6] W.-Y. Hsiang, *On the sphere packing problem and the proof of Kepler's conjecture*, Internat. J. Math. **93** (1993), 739 – 831.

[7] J. Kepler, *Vom Sechseckigen Schnee*, Strena, Frankfurt/Main, 1611, (Faksimile-Verlag Bremen, 1982).

[8] J. Milnor, *Hilbert's problem 18: On crystallographic groups, fundamental domains and on sphere packings*, Proc. Symp. Pure Math. AMS **28** (1976), 491 – 506.

[9] C.A. Rogers, *The packing of equal spheres*, Proc. London Math. Soc. (3)**8** (1958), 609 – 620.

[10] J.M. Wills, *Spheres and sausages, crystals and catastrophes, and a joint packing theory*, Math. Intelligencer **20** (1998), 16 – 21.

Martin Henk, Universität Magdeburg, FB Mathematik/IMO, Universitätsplatz 2, 39106 Magdeburg, henk@imo.math.uni-magdeburg.de